

TD₃ – Algèbre Linéaire : Rappels et Compléments

Exercice 1 ★

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer une base et la dimension.

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0\} \quad F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x + 5y - 3z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : (X - 1)P' - XP'' = 2P\} \quad H = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : MN = NM\}$$

où $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, avec λ_1, λ_2 deux réels fixés distincts

Exercice 2 ★

1. $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (0, 1, 4)$, $u_3 = (1, 0, -2)$, $u_4 = (-5, 16, 24)$ forment-ils une famille libre ?
2. $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 4)$, $v_3 = (1, 0, -2)$ forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?
3. Soit $a = (-3, 1, 4, -3)$, $b = (-1, 7, -8, 7)$, et $c = (11, -7, -10, 7)$. Existe-il un vecteur d de $\mathbb{R}^4$ tel que (a, b, c, d) soit une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 3 ★★★

Déterminer si les familles suivantes de E sont libres :

1. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, \mathbb{R})$ où les a_i deux-à-deux distincts, $(f_1, \dots, f_n)$ où $f_k : x \mapsto \frac{1}{x - a_k}$.
2. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(f_1, \dots, f_n)$ où $f_k : x \mapsto \sin^k(x)$.
3. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(f_1, \dots, f_n)$ où $f_k : x \mapsto \sin(kx)$.

Exercice 4 ★★

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer le rang de la famille (f, g, h, k) où $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto e^x$, $h : x \mapsto e^{x+1}$ et $k : x \mapsto x$.

Exercice 5 ★★

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - 2y + 3z - 5t = 0 \end{cases} \right\}$$

$$G = \text{Vect}(\{(1, -2, 0, 2), (0, 0, 1, 3)\}).$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$
2. Trouver une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E telle que $\{e_1, e_2\} \subset F$ et $\{e_3, e_4\} \subset G$.
3. Exprimer les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ dans cette base.
4. En déduire l'expression de la projection sur F parallèlement à G .

Exercice 6 ★★

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. Notons F l'ensemble des suites constantes et G l'ensemble des suites convergentes de limite nulle.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer qu'ils sont en somme directe

3. Déterminer $F \oplus G$ **Exercice 7** ★★

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, 1, 1, 3)$, $w = (2, 1, 1, 1)$, $x = (-1, 0, -1, 2)$ ainsi que $y = (2, 3, 0, 1)$.

Déterminer (en justifiant) les dimensions des espaces $U = \text{Vect}(u, v, w)$, $V = \text{Vect}(x, y)$ puis des espaces $U + V$ et $U \cap V$.

Exercice 8 ★★★★★

Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}, P(j) = 0\}$.

- Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$, et que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P \in F_i$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - j)$.
- Montrer que la somme $F_0 + F_1 + \dots + F_n$ est directe.
- En déduire que $\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^n F_i$.

Exercice 9 ★★

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $XQ' + Q = P$.

Exercice 10 ★★

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Montrer que $v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement si $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$.

Exercice 11 ★★

Soit p l'application $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ définie par $p(x, y) = \frac{1}{5}(x + 2y, 2x + 4y)$.

- Montrer que p est un endomorphisme.
- Déterminer une base de $\text{Ker} p$. L'application p est-elle injective ?
- Déterminer une base de $\text{Im} p$.
- Montrer que $p \circ p = p$. Les sous-espaces $\text{Ker} p$ et $\text{Im} p$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{C}^2$?

Exercice 12 ★★

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E . Montrer que

$$p \circ q = p \Leftrightarrow \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p)$$

et que

$$q \circ p = p \Leftrightarrow \text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)$$

Exercice 13 ★★★★★

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + 2f - 3\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- Montrer qu'il existe deux homothéties, et deux seulement, vérifiant la condition demandée.
- Montrer que $f \in \mathcal{GL}(E)$.
- Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$.

Exercice 14 ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit φ une forme linéaire non nulle sur E .

1. Montrer que pour tout $u \notin \text{Ker}(\varphi)$, $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Vect}(u)$.
2. Soit ψ une autre forme linéaire non nulle sur E . Montrer que φ et ψ sont proportionnelles si et seulement si $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$.

Exercice 15 ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension $n > 1$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit x un vecteur de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.

Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ constitue une base de E .

Exercice 16 ★★

Dans cet exercice, on note $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère $a : E \rightarrow E$ et l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$:

$$\begin{array}{ccc} a & : & E \rightarrow E \\ P & \mapsto & XP \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \mapsto & u \circ a - a \circ u \end{array}$$

1. Montrer que a est un endomorphisme de E . Est-il injectif? Surjectif?
2. Montrer que φ est un endomorphisme non injectif de $\mathcal{L}(E)$.
3. En écrivant pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre $u(X^n)$, $u(X^{n+1})$ et $\varphi(u)(X^n)$, montrer que φ est surjectif.

Exercices issus d'oraux

Exercice 17 ★★

(Oral 2008)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et D l'application qui, à un polynôme associe sa dérivée P' .

1. Montrer que D est un endomorphisme de E . En préciser le noyau et l'image.
2. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $D^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$
3. Montrer que $\text{Id}_E - D$ est un isomorphisme de E .
4. Résoudre l'équation différentielle $y'(x) - y(x) = \frac{x^n}{n!}$

Exercice 18 ★★★

(Oral 2009, 2011)

1. Soit p et q deux projecteurs de E .
 - (a) Montrer que $p \circ q + q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$
 - (b) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$
 - (c) Comparer alors $\text{Ker}(p + q)$ et $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.
 - (d) Comparer de même $\text{Im}(p + q)$ et $\text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x, 2x)$
 - (a) Montrer que f est un projecteur.
 - (b) Déterminer tous les projecteurs g tels que $f + g$ soit un projecteur.

Exercice 19 ★★★

(Oral 2013, 2014, 2015)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \text{Id}_E$.

1. Montrer que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$.
2. Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(f - \text{Id}_E)$.
3. En déduire que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$.

Exercice 20 ★★★

(Oral 2014)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, F l'ensemble des polynômes P de E tels que $\int_0^1 P(t) dt = 0$ et $G = \text{Vect}(1 + X + X^2)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E . Quel est sa dimension ?
2. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G . Pour Q dans E , déterminer $p(Q)$ en fonction de $\int_0^1 Q(t) dt$ et de Q .

Exercice 21 ★★

(Oral 2017)

Montrer que φ qui à P associe $P(X + 1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera le noyau et l'image.